Teoremas globales de aproximación en EDPs y aplicaciones

Mª Ángeles García-Ferrero

INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

FÍSICA TEÓRICA desde la UVa

27 de mayo de 2016

ICMAT

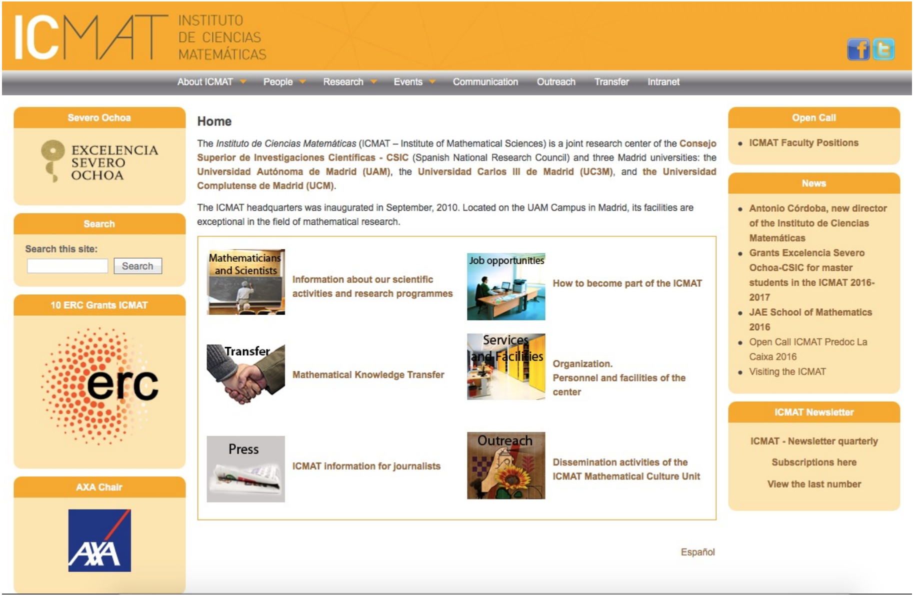
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

CSIC Consejo Superior de Investigaciones Científicas

UAM Universidad Autónoma de Madrid

Universidad Complutense Madrid

www.icmat.es



ICMAT INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

About ICMAT | People | Research | Events | Communication | Outreach | Transfer | Intranet

Severo Ochoa

EXCELENCIA SEVERO OCHOA

Search

Search this site: Search

10 ERC Grants ICMAT

erc

AXA Chair

AXA

Home

The *Instituto de Ciencias Matemáticas* (ICMAT – Institute of Mathematical Sciences) is a joint research center of the **Consejo Superior de Investigaciones Científicas - CSIC** (Spanish National Research Council) and three Madrid universities: the **Universidad Autónoma de Madrid (UAM)**, the **Universidad Carlos III de Madrid (UC3M)**, and **the Universidad Complutense de Madrid (UCM)**.

The ICMAT headquarters was inaugurated in September, 2010. Located on the UAM Campus in Madrid, its facilities are exceptional in the field of mathematical research.

Mathematicians and Scientists	**Information about our scientific activities and research programmes**	Job opportunities	**How to become part of the ICMAT**
Transfer	**Mathematical Knowledge Transfer**	Services and Facilities	**Organization. Personnel and facilities of the center**
Press	**ICMAT information for journalists**	Outreach	**Dissemination activities of the ICMAT Mathematical Culture Unit**

Español

Open Call

- **ICMAT Faculty Positions**

News

- **Antonio Córdoba, new director of the Instituto de Ciencias Matemáticas**
- **Grants Excelencia Severo Ochoa-CSIC for master students in the ICMAT 2016-2017**
- **JAE School of Mathematics 2016**
- Open Call ICMAT Predoc La Caixa 2016
- Visiting the ICMAT

ICMAT Newsletter

ICMAT - Newsletter quarterly

Subscriptions here

View the last number

TEOREMAS GLOBALES DE APROXIMACIÓN EN EDPs

¿Qué es un teorema global de aproximación para un operador diferencial P?

Si una función v satisface la ecuación $P[v] = 0$ en un cerrado $S \subset \mathbb{R}^n$, asumiendo ciertas condiciones topológicas y de regularidad en la frontera, entonces hay una solución global u de la ecuación $P[u] = 0$ que se le aproxima, es decir, tal que la diferencia $u - v$ en S puede hacerse arbitrariamente pequeña en una norma adecuada.

Primer teorema de aproximación

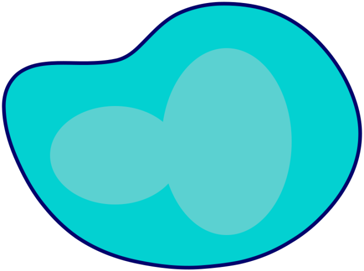
Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Teorema de Runge

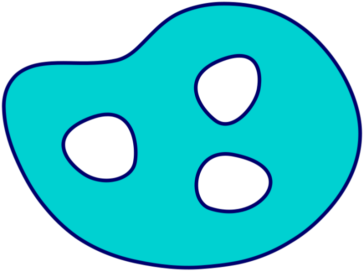
Sea S un conjunto compacto de $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C} \setminus S$ es conexo, y sea $f(z)$ una función holomorfa en S. Entonces podemos aproximar $f(z)$ uniformemente en S por polinomios, i.e. dado $\epsilon > 0$, existe un polinomio $p(z)$ tal que

$$|u(z) - p(z)| < \epsilon, \forall z \in S.$$

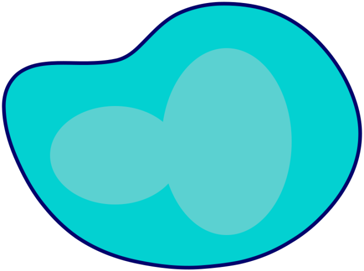
Carle Runge
(1856-1927)



$\mathbb{C} \setminus S$ conexo

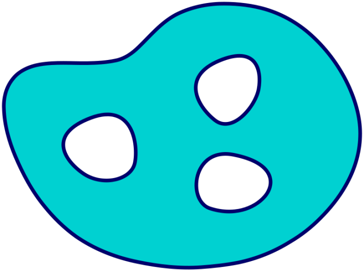


$\mathbb{C} \setminus S$ no conexo



$\mathbb{C} \setminus S$ conexo

(polinomios)



$\mathbb{C} \setminus S$ no conexo

(funciones racionales)

Operadores elípticos

Teorema de Lax-Malgrange (1956)

Sea P un operador diferencial ellíptico con coeficientes analíticos. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{R}^n \setminus S$ no tiene componentes conexas compactas. Si v satisface $Pv = 0$ en S, entonces v se puede aproximar uniformemente en S por soluciones en todo $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos: Δ

$\Delta + \lambda^2$

Operador del calor

Teorema (Jones, 1975 - Díaz, 1980)

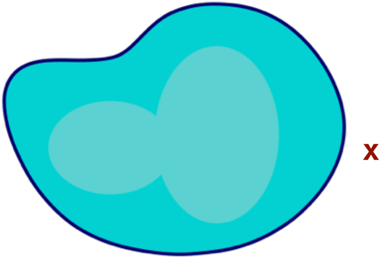
Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que para cada hiperplano Π ortogonal al eje del tiempo $\Pi \setminus S$ no tiene componentes conexas compactas. Si v satisface $\partial_t v - \Delta v = 0$ en S, entonces v puede aproximarse uniformemente en S por soluciones de la ecuación del calor en todo $\mathbb{R}^{n+1}$.

Idea de la prueba

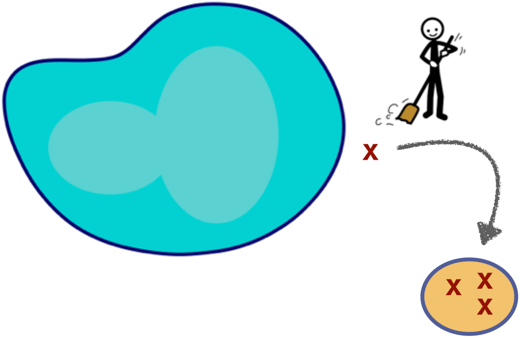
- $G(x,y)$: solución fundamental, i.e. $P[G(x,y)] = \delta_y(x)$
- $v \rightsquigarrow \tilde{v} = \sum_{i=1}^{I} c_i G(x, x_i)$, donde $x_i \in$ entorno de S
- "Barremos" cada polo x_i hacia el infinito

$$G(x, x_i) \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{J} b_j G(x, y_j) \rightsquigarrow \cdots$$

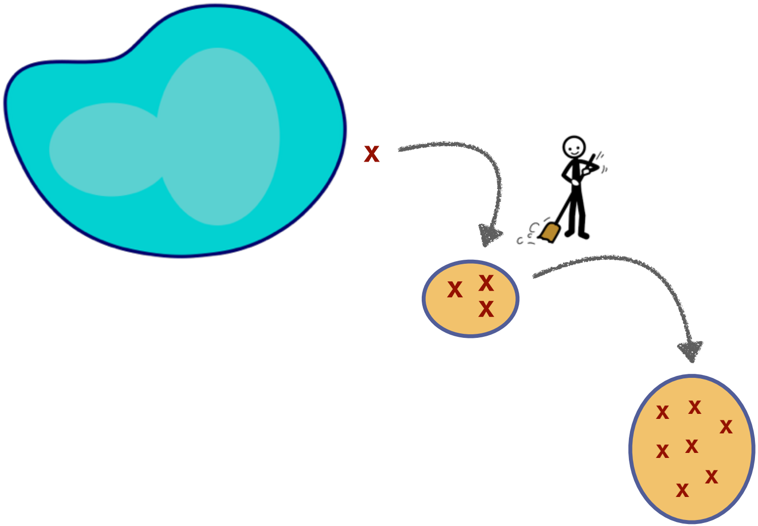
Idea de la prueba



Idea de la prueba



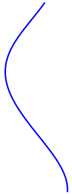
Idea de la prueba



ALGUNAS APLICACIONES

Conjuntos de nivel de soluciones de EDPs elípticas

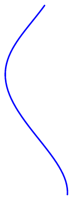
1. $Pv = 0$
   $v\big|_{\gamma} = 0$



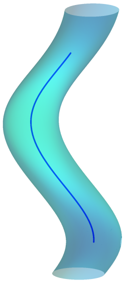
γ

Conjuntos de nivel de soluciones de EDPs elípticas

1. $Pv = 0$
   $v\big|_{\gamma} = 0$
2. Existe v en S



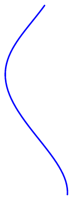
γ



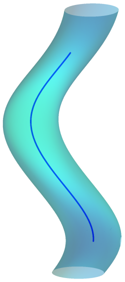
S

Conjuntos de nivel de soluciones de EDPs elípticas

1. $Pv = 0$
   $v\big|_{\gamma} = 0$
2. Existe v en S
3. Aproximamos por u global



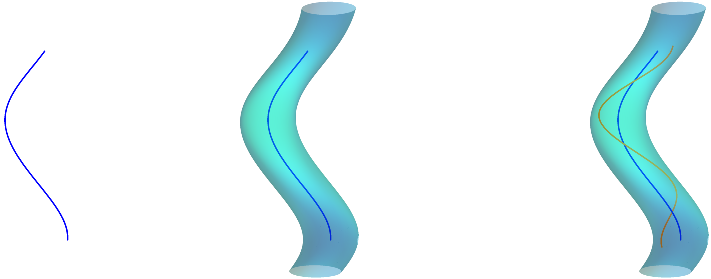
γ



S

Conjuntos de nivel de soluciones de EDPs elípticas

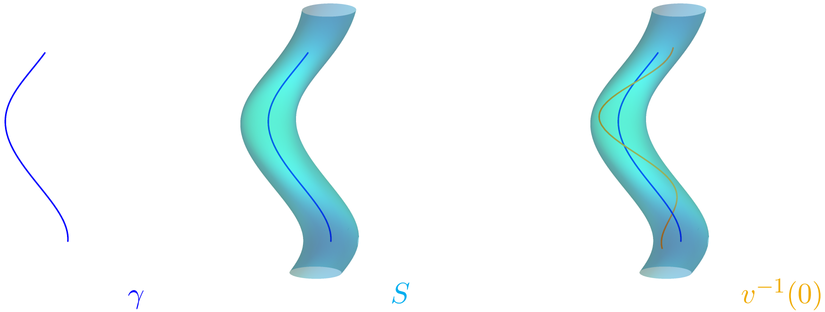
1. $Pv = 0$
   $v\big|_{\gamma} = 0$
2. Existe v en S
3. Aproximamos por u global
4. $u^{-1}(0) \sim v^{-1}(0)$ en S



γ S $v^{-1}(0)$

Conjuntos de nivel de soluciones de EDPs elípticas

1. $Pv = 0$
   $v\big|_\gamma = 0$
2. Existe v en S
3. Aproximamos por u global
4. $u^{-1}(0) \sim v^{-1}(0)$ en S



A. Enciso, D. Peralta-Salas, Submanifolds that are level sets of a solution to a second-order elliptic PDE, Adv. Math. 249 (2013) 204-249. Robustez en no compactos

Soluciones estacionarias de la ecuación de Euler

Ecuación de Euler: $\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla P, \qquad \text{div } u = 0$

Campos de Beltrami: $\text{rot } u = \lambda u, \qquad \lambda \neq 0$

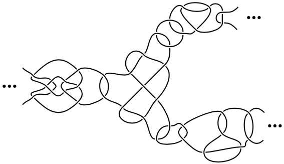
$$\Delta u + \lambda^2 u = 0$$

Soluciones estacionarias de la ecuación de Euler

Ecuación de Euler: $\partial_t u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla P, \qquad \text{div } u = 0$

Campos de Beltrami: $\text{rot } u = \lambda u, \qquad \lambda \neq 0$

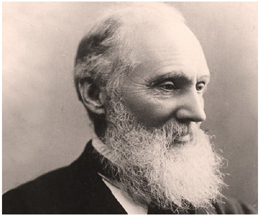
$$\Delta u + \lambda^2 u = 0$$



A. Enciso, D. Peralta-Salas, Knots and links in steady solutions of the Euler equations, Ann. of Math. 175 (2012) 345-367.
Mejor que uniforme

A. Enciso, D. Peralta-Salas, Existence of knotted vortex tubes in steady Euler flows, Acta Math. 214 (2015) 61-134.
Con decaimiento

Soluciones estacionarias de la ecuación de Euler

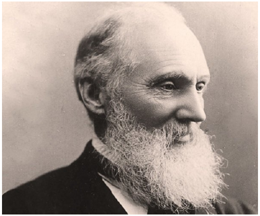


W. Thomson (Lord Kelvin)
(1824-1907)

Conjetura de Lord Kelvin (1875)

En los fluidos estacionarios pueden aparecer tubos anudados

Soluciones estacionarias de la ecuación de Euler



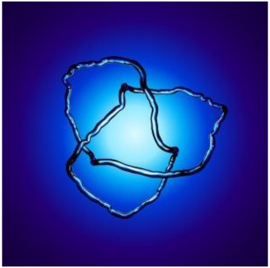
W. Thomson (Lord Kelvin)
(1824-1907)

Conjetura de Lord Kelvin (1875)

En los fluidos estacionarios pueden aparecer tubos anudados

A. Enciso, D. Peralta-Salas, Existence of knotted vortex tubes in steady Euler flows, Acta Math. 214 (2015) 61-134.

D. Kleckner, W. Irvine, Creation and dynamics of knotted vortices, Nature Phys. 9 (2013) 253-258.



Grafos mínimos con microoscilaciones

$$\left\{ (x, u(x)) : \quad x \in \mathbb{B}^n, \quad \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \right\}$$

A. Enciso, MAGF, D. Peralta-Salas

Existe un grafo mínimo sobre la bola unidad $\mathbb{B}^n$ tal que el "área" de su intersección con $\{x_{n+1} = c\}$ es arbitrariamente grande.

Grafos mínimos con microoscilaciones

$$\left\{ \big(x, u(x)\big) : \quad x \in \mathbb{B}^n, \quad \underbrace{\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0}_{\Delta u - F(u) = 0} \right\}$$

A. Enciso, MAGF, D. Peralta-Salas

Existe un grafo mínimo sobre la bola unidad $\mathbb{B}^n$ tal que el "área" de su intersección con $\{x_{n+1} = c\}$ es arbitrariamente grande.

1. Sea $S \subset \mathbb{B}^n$ hipersuperficie con área arbitrariamente grande.
2. $\Delta v = 0, \ v\big|_S = c$. Existe v en un entorno de S.
3. Teorema de Lax-Malgrange + proceso iterativo $\to u$.
4. $\|u - v\|_{C^k(\mathbb{B}^n)}$ pequeña, $u^{-1}(c)$ parecido a S en $\mathbb{B}^n$.

MUCHAS GRACIAS